Zadaća iz Matematike računalom

Ivo Ugrina
ivo@iugrina.com

28. siječnja 2005.

Zadatak 1 *Koji je najmanji prirodan broj n za koji ne postoje prosti brojevi oblika $\underbrace{x\ldots x}_{n}y\underbrace{z\ldots z}_{n}$ gdje znamenke zadovoljavaju $x < y < z$?*

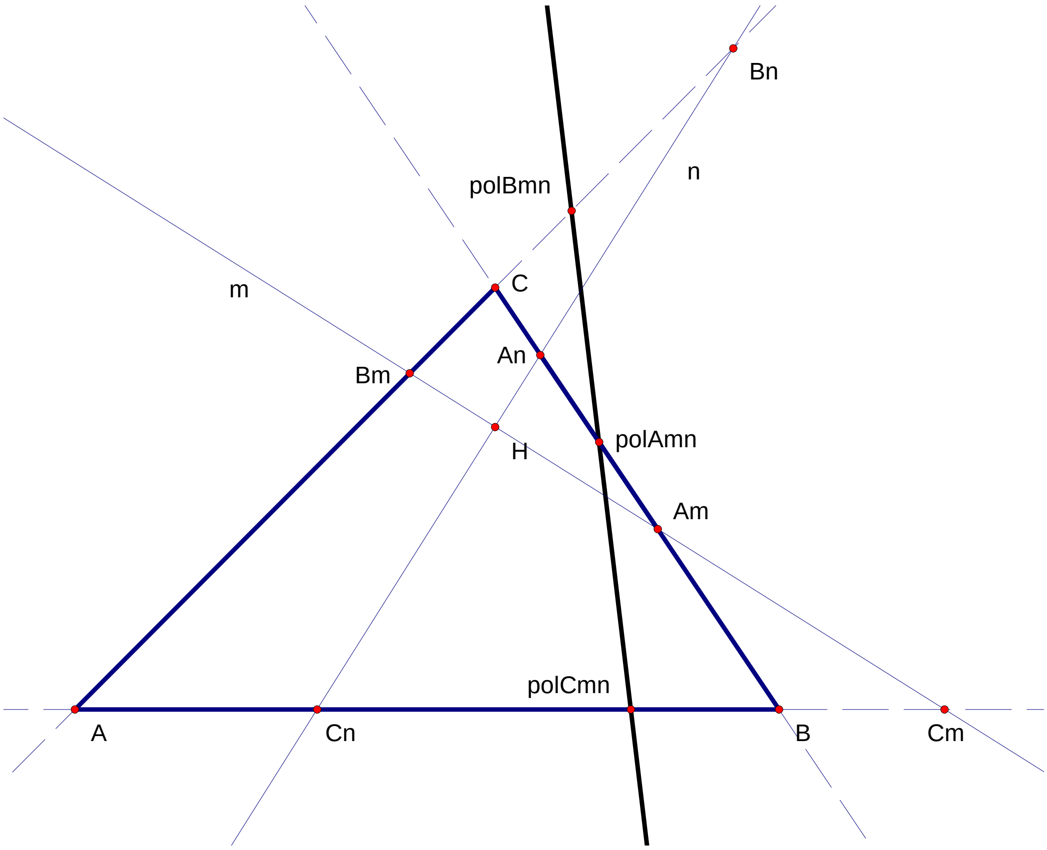
Rješenje: Zadatak možemo riješiti sljedećim algoritmom:

```
uvjet2 = False;
n = 0;
While[uvjet2 == False,
  n++; uvjet = False;
  For[x = 1, x < 8, x++,
    For[y = x + 1, y < 9, y++,
      For[z = y + 1, z < 10, z++,
        If[Mod[z, 2] == 0, Continue[],
          br1 = 0; br3 = 0;
          For[i = 0, i < n, i++
            br1 = br1 + (x * 10^i);
            br3 = br3 + (z * 10^i)
          ];
          If[PrimeQ[broj = br1 * (10^(n+1)) + y * (10^n) + br3],
            uvjet = True;  Print["(n = ", n, ") --", broj];
            Break[],
          ];
          If[x == 7, uvjet2 = True;
          Print["Uspjeh! Trazeni broj n je ", n, "."], ]
        ]
      ];
      If[uvjet == True, Break[], ]
    ];
    If[uvjet == True, Break[], ]
  ]
]
```

Ispis algoritma
(n=1)–127
(n=2)–11299
(n=3)–1112333
(n=4)–111137777
(n=5)–11111599999
(n=6)–1111115777777
(n=7)–111111139999999
(n=8)–11111111233333333
Uspjeh! Trazeni broj n je 9.

Algoritam kreće od $n = 1$ i pokušava pronaći najmanji prost broj za odgovarajući n. Ukoliko pronađe takav algoritam ga ispisuje i petlja prelazi na sljedeći prirodan broj, inače je zadatak riješen.

Zadatak 2 *Neka su m i n okomiti pravci koji prolaze ortocentrom H trokuta ABC. Neka oni sijeku pravce BC, CA i AB u točkama A_m, B_m i C_m odnosno A_n, B_n i C_n. Dokažite da polovišta dužina A_mA_n, B_mB_n i C_mC_n leže na pravcu. Istražite još neka svojstva te konfiguracije!*



Slika 1: Pravac kroz polovišta dužina $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_n$, $\mathrm{B}_m\mathrm{B}_n$ i $\mathrm{C}_m\mathrm{C}_n$

Rješenje: Uz uporabu već postojećih funkcija za analitičku geometriju (mogu se naći u priloženom dokumentu: *p-v13_zad_2004.nb*) problem možemo riješiti na sljedeći način:

1. Zadavanje općenitih točaka:
   - tA := {0,0} tB := {1,0} tC := {c1,c2}
2. Računanje koordinata ortocentra:
   - tH := ortocentar[tA, tB, tC]
3. Zadavanje pravaca m i n $(m \perp n)$ kroz ortocentar H:
   - pm := pravackt[k1, tH]
     pn := okomica[tH, pm]

   \- *Pojašnjenje postpuka:* Pravac m zadajemo pomoću neodređenog koeficijenta smjera *k1* i ortocentra *H*, a pravac n kao okomicu na novogenerirani pravac m kroz ortocentar *H*. Podrazumjeva se da se pravac m može prikazati pomoću koeficijenta smjera jer bi u suprotnom presjek pravca n sa pravcem AB bio prazan skup.
4. Računanje koordinata od A_m, A_n, B_m, B_n, C_m i C_n:
   - tAm := presjek2p[pm, pravac2t[tB, tC]]
     tAn := presjek2p[pn, pravac2t[tB, tC]]
     tBm := presjek2p[pm, pravac2t[tA, tC]]
     tBn := presjek2p[pn, pravac2t[tA, tC]]
     tCm := presjek2p[pm, pravac2t[tB, tA]]
     tCn := presjek2p[pn, pravac2t[tB, tA]]
5. Računanje koordinata polovišta dužina $\mathrm{A}_m\mathrm{A}_n$, $\mathrm{B}_m\mathrm{B}_n$ i $\mathrm{C}_m\mathrm{C}_n$:
   - polAmn := poloviste[tAm, tAn]
     polBmn := poloviste[tBm, tBn]
     polCmn := poloviste[tCm, tCn]
6. Provjera da li se točke *polAmn, polBmn* i *polCmn* nalaze na istom pravcu:
   - tockanapravcuQ[polAmn, pravac2t[polBmn, polCmn]]

   \- *Napomena:* Ako ste sve unijeli ispravno rezultat koraka 6 biti će nula i time je dokaz završen.

Zadatak 3 *Parabola je simetrična u odnosu na pravac $x-1=0$, os ordinata siječe u točki A(0,4), a os apcisa u točki B(-2,0). Odredi jednadžbu polinoma II stupnja čiji je to graf i nacrtaj tu parabolu i napiši tok funkcije.*

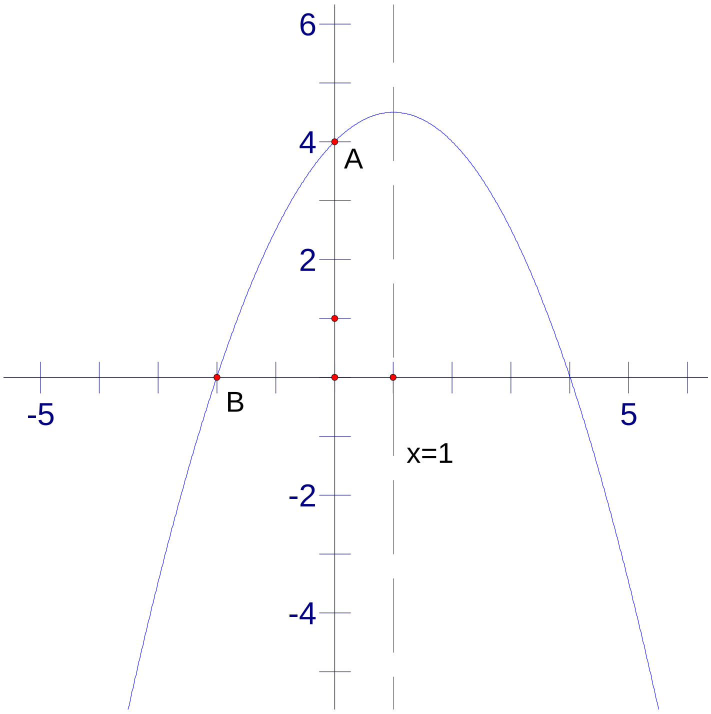
Rješenje: Iz jednadžbe pravca na koji je parabola simetrična zaključujemo da je maksimum na pravcu x=1, tj. ima oblik (1,t), $t \in \mathbb{R}$. Maksimum zbog toga što se točke A i B nalaze sa lijeve strane pravca simetrije i na tom dijelu parabola raste ($x_A > x_B$ i $y_A > y_B$).

1. Zadajmo općeniti polinom II. stupnja gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$:
   - f[x_] := $a * x * x + b * x + c$
2. Izračunajmo prvu derivaciju od f, tj. $\frac{df}{dx}$.
   - f'[x]
   - Rezultat je $b + 2ax$ pa zaključujemo da je $b = -2a$ zbog $x_{max} = 1$ i $\frac{df}{dx}(x_{max})$=0.
3. Iskažimo varijablu b pomoću varijable a.
   - b:=-2*a
4. Odredimo varijablu c iz jednadžbe $f(0) = 4$.
   - Solve[f[0]==4, c]
5. Pridjelimo varijabli c vrijednost 4 dobivenu u prethodnom koraku.
   - c := 4
6. Odredimo varijablu a iz jednadžbe $f(-2) = 0$.
   - Solve[f[-2]==0, a]
7. Pridjelimo varijabli a vrijednost $-\frac{1}{2}$ dobivenu u prethodnom koraku.
   - a := -1/2
   - Zbog $b = -2a$ jasno je da b poprima vrijednost 1 i da je traženi polinom II. stupnja dan s $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.

8. Za kraj nacrtajmo dobiveni polinom II. stupnja.

   - $\boxed{\text{Plot[f[x], \{x, -5 , 5\}]}}$

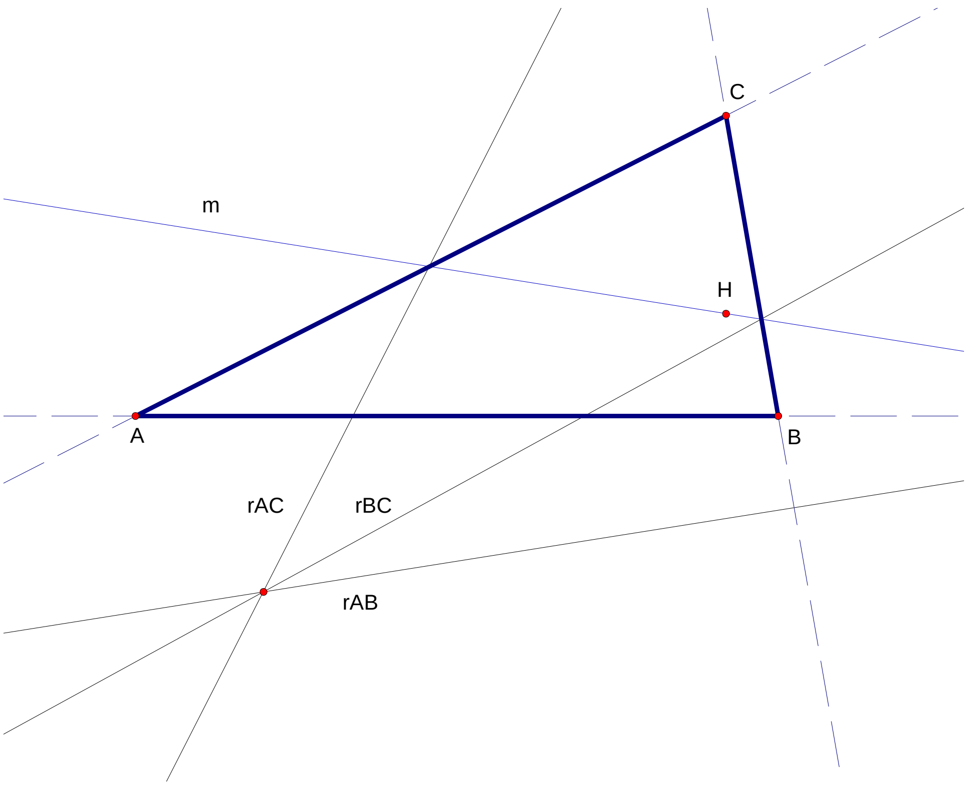
   - Kao što možemo primjetiti i sa slike polinom raste na intervalu $<-\infty, 1>$, a pada na $<1, +\infty>$.



Slika 2: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

<u>*DODATAK:*</u>

Tvrdnja 1 *Neka je m pravac kroz ortocentar H trokuta ABC. Refleksije od m na pravce AB, BC i AC sjeku se u jednoj točki.*



Slika 3: Sjecište refleksija pravca m na pravce AB, BC i AC

Rješenje: Kao i u *Zadatku 2* upotrebljavati ćemo već postojeće funkcije za analitičku geometriju. Pomoću njih problem možemo riješiti na sljedeći način:

1. Zadavanje općenitih točaka:
   - tA := {0,0} tB := {1,0} tC := {c1,c2}
2. Računanje koordinata ortocentra:
   - tH := ortocentar[tA, tB, tC]
3. Zadavanje pravca m kroz ortocentar H:
   - pm := pravackt[k1, tH]
   - *Napomena:* Ako se pravac m ne može prikazati sa koeficijentom smjera, tj. pravac m je okomit na os x onda je rješenje trivijalno i sjecište je točka C.
4. Odredimo refleksije od m na pravce AB, AC i BC:
   - rAB := pravac2t[presjek2p[pravac2t[tA, tB], pm], refleksijaP[tH, pravac2t[tA, tB]]]
     rAC := pravac2t[presjek2p[pravac2t[tA, tC], pm], refleksijaP[tH, pravac2t[tA, tC]]]
     rBC := pravac2t[presjek2p[pravac2t[tB, tC], pm], refleksijaP[tH, pravac2t[tB, tC]]]
5. Provjerimo da li su pravci rAB, rAC i rBC konkurentni:
   - konkurentniQ[rAB, rBC, rAC]
   - *Napomena:* Ako ste sve unijeli ispravno rezultat koraka 5 biti će nula i time je dokaz završen.