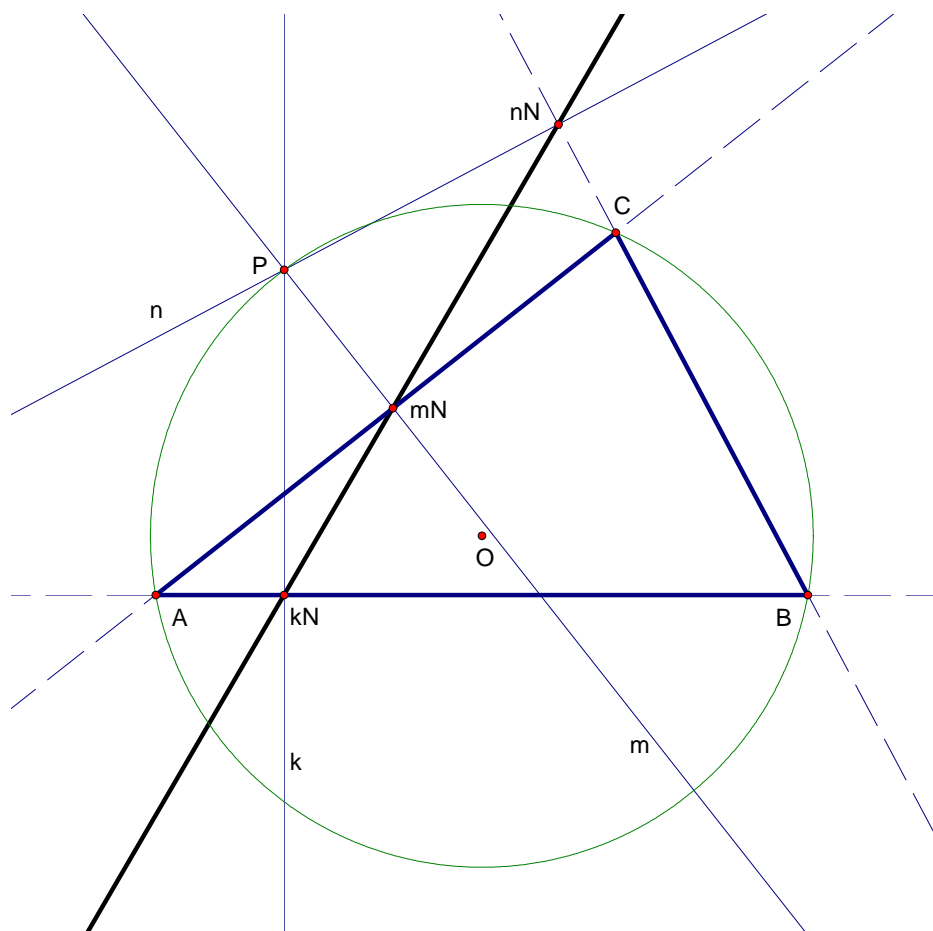


# Druga zadaća iz Matematike računalom

Ivo Ugrina  
ivo@iugrina.com

14. lipnja 2005.

**Zadatak 1** Pokažite da točka  $P$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$  onda i samo onda ako su nožišta okomica iz točke  $P$  na pravce  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  kolinearne.



Slika 1: Simpsonov pravac

**Rješenje:** Uz uporabu već postojećih funkcija za analitičku geometriju (mogu se pronaći u priloženom dokumentu: *p-v24\_zad\_2004.nb*) zadatak možemo riješiti na sljedeći način:

1. Zadavanje točaka:

$$\begin{aligned} & \overline{tA := \{0,0\}} \\ & \bullet \overline{tB := \{1,0\}} \\ & \overline{tC := \{c1,c2\}} \end{aligned}$$

2. Računanje koordinata središta trokutu  $ABC$  opisane kružnice:

$$\bullet \overline{tO = e2X3[tA, tB, tC];}$$

3. Računanje koordinata ortogonalnih projekcija točke  $P$  na pravce  $AB$ ,  $AC$  i  $BC$ :

$$\begin{aligned} & \overline{kN = e2protp[ tP, e2p2t[tA, tB]];} \\ & \bullet \overline{mN = e2protp[ tP, e2p2t[tA, tC]];} \\ & \overline{nN = e2protp[ tP, e2p2t[tB, tC]];} \end{aligned}$$

4. Pronađimo odnos između koordinata točke  $P = (p1, p2)$  kada se točka  $P$  nalazi na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ :

$$\bullet \overline{\text{Solve}[(p1-tO[[1]])^2 + (p2-tO[[2]])^2 - e2d2[tO, tA]==0, p1]}$$

5. Pronađimo odnos između koordinata točke  $P$  kada su točke  $kN$ ,  $mN$  i  $nN$  kolinearne:

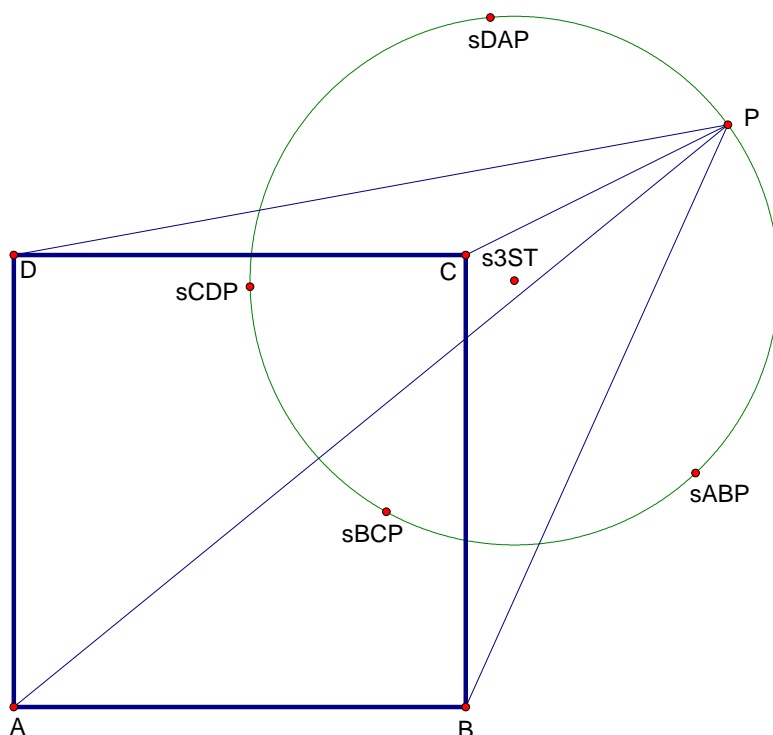
$$\bullet \overline{\text{Solve}[e23tpQ[mN, kN, nN] == 0, p1]}$$

Kako su rezultati ((1), (2)) koraka 4 i ((1), (2)) koraka 5 identični možemo zaključiti da su uvjeti ekvivalentni, tj. ukoliko  $P$  zadovoljava jedan od uvjeta onda zadovoljava oba.

$$p1 \rightarrow - \frac{-c1^2 + c2 - c2^2 - \sqrt{(c1^2 - c2 + c2^2)^2 + 4c1(c1p2 - c1p2^2)}}{2c1} \quad (1)$$

$$p1 \rightarrow - \frac{-c1^2 + c2 - c2^2 + \sqrt{(c1^2 - c2 + c2^2)^2 + 4c1(c1p2 - c1p2^2)}}{2c1} \quad (2)$$

**Zadatak 2** Ako je  $ABCD$  kvadrat u ravnini, onda za svaku točku  $P$  koja ne leži na niti jednom od pravaca  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  i  $DA$  Steinerove točke trokuta  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $CDP$  i  $DAP$  leže na kružnici. Gdje se nalazi središte te kružnice i koliki joj je radijus.



Slika 2: Kružnica kroz Steinerove točke trokuta  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $CDP$  i  $DAP$

**Rješenje:** Pokažimo prvo da se sve četiri Steinerove točke nalaze na istoj kružnici.

1. Zadavanje točaka:

$$\begin{array}{l} \overline{tA := \{0,0\}} \\ \overline{tB := \{a,0\}} \\ \bullet \quad tC := \{a,a\} \\ \overline{tD := \{0,a\}} \\ \overline{tP := \{p1,p2\}} \end{array}$$

2. Pronađimo koordinate Steinerovih točaka trokuta  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $CDP$  i  $DAP$ :

$$\begin{aligned} & \overline{sABP = e2X99[tA, tB, tP];} \\ & \bullet \overline{sBCP = e2X99[tB, tC, tP];} \\ & \overline{sCDP = e2X99[tC, tD, tP];} \\ & \overline{sDAP = e2X99[tD, tA, tP];} \end{aligned}$$

3. Pronađimo koordinate središta kružnice  $k$  kroz točke  $sABP$ ,  $sBCP$ ,  $sCDP$  te polumjer:

$$\begin{aligned} & \bullet \overline{s3ST = e2X3[sABP, sBCP, sCDP];} \\ & \overline{r3ST = e2d[s3ST, sABP];} \end{aligned}$$

4. Provjerimo da li se točka  $sDAP$  nalazi na dobivenoj kružnici  $k$ :

$$\bullet \overline{e2tkQ[sDAP, \{s3ST, r3ST\}]}$$

- Rezultat bi trebao biti *True* čime je prvi dio zadatka riješen.

Zanimljivo je da se i točka  $P$  nalazi na kružnici  $k$ .

$$\bullet \overline{e2tkQ[tP, \{s3ST, r3ST\}]}$$

- Rezultat: *True*

Potrebno je još pronaći središte kružnici  $k$  i polumjer u općenitim koordinatama.

1. Zadavanje točaka:

$$\begin{aligned} & \overline{tA := \{0, 0\}} \\ & \bullet \overline{tB := \{x1, x2\}} \\ & \overline{tD := \{y1, y2\}} \\ & \overline{tP := \{z1, z2\}} \end{aligned}$$

2. Računanje Steinerovih točaka trokuta  $ABP$  i  $DAP$ :

$$\bullet \overline{sABP = e2X99[tA, tB, tP];}$$

$$\bullet \overline{sDAP = e2X99[tD, tA, tP];}$$

3. Računanje koordinata središta kružnice  $k$ :

- $\overline{\text{sODk=e2X3[sABP, sDAP, tP]}}$

- Koristimo tvrdnju da se i točka  $P$  nalazi na kružnici  $k$ .

4. Računanje kvadrata polumjera kružnice  $k$ :

- $\overline{\text{rODk=e2d2[tmp, tP]}}$

Do sada smo radili pomoću modificiranih koordinata pa je potrebno sve točke translirati za vektor  $A = (a1, a2)$ . Varijable početne konfiguracije neka su uz  $A$  još:  $B = (b1, b2)$ ,  $C = (c1, c2)$ ,  $D = (d1, d2)$  i  $P = (p1, p2)$ .

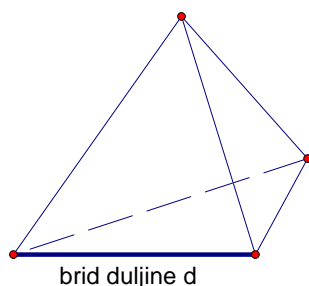
- $\overline{\text{FS[sODk /. \{x1->b1 - a1, x2->b2 - a2, y1->d1 - a1, y2->d2 - a2, z1->p1 - a1, z2->p2 - a2\}]}}$
- $\overline{\text{FS[rODk /. \{x1->b1 - a1, x2->b2 - a2, y1->d1 - a1, y2->d2 - a2, z1->p1 - a1, z2->p2 - a2\}]}}$

- *Napomena:* Ovo se veoma dugo računa.

U gornjem bloku naredbi kao *Output* dobili smo središte i kvadrat polumjera čime je zadatak riješen.

**Zadatak 3** Ako tetraedar ima samo jedan brid veći od jedan dokažite da mu je volumen najviše  $\frac{1}{8}$ .

**Rješenje:** Neka je  $T_1$  proizvoljan tetraedar takav da mu je samo jedan brid veći od jedan. Generirajmo tetraedar  $T_2$  na sljedeći način. Neka je brid  $x_2$  tetraedra  $T_2$  duljine  $d := \min\{\text{duljine svih bridova tetraedra } T_1\}$ , te neka je baza od  $T_2$  dana kao jednakokračan trokut s dvije stranice duljine 1 te stranicom  $x_2$ . Strana tetraedra  $T_2$  nad stranicom  $x_2$  baze  $B_2$  neka je isti takav jednakokračan trokut koji u prostoru zatvara kut od 90 stupnjeva sa bazom  $B_2$  tetraedra  $T_2$ .



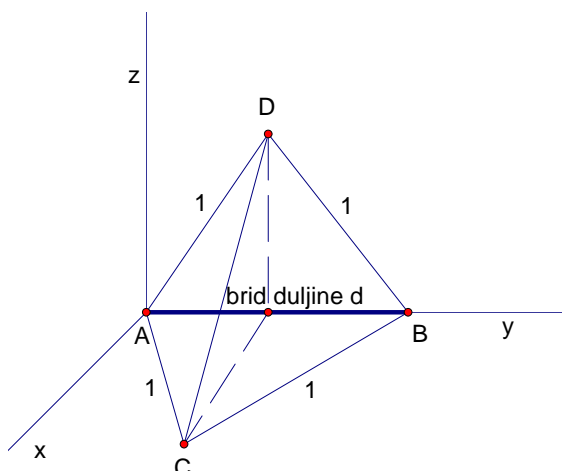
Slika 3: Tetraedar  $T_1$

Jedana od konfiguracija u prostoru  $\mathbb{R}^3$  može se ostvariti kao na slici 4:  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (0, d, 0)$ ,  $C = (\sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}, \frac{d}{2}, 0)$ ,  $D = (0, \frac{d}{2}, \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}})$  gdje su  $A, B, C, D$  vrhovi tetraedra  $T_2$ .

Ako sada dokažemo da je  $Vol_{T_1} \leq Vol_{T_2}$  i  $Vol_{T_2} \leq \frac{1}{8}$  riješili smo zadatak.

Dokažimo prvo da je  $Vol_{T_1} \leq Vol_{T_2}$ . Neka je baza tetraedra  $T_1$  strana kod koje su svi bridovi manji ili jednaki jedan te barem jedan brid duljine  $d$ . Označimo takav brid s  $x_1$ . Površina baze  $B_1$  tada je  $P(B_1) = \frac{1}{2}d * v_{(B_1, x_1)}$  gdje je  $v_{(B_1, x_1)}$  visina baze  $B_1$  nad stranicom  $x_1$ . Pomoću Tvrdnje 1 (za detaljniju formulaciju pogledati Dodatak) vidimo da je

$$P(B_1) = \frac{1}{2}d * v_{(B_1, x_1)} \leq \frac{1}{2}d * v_{(B_2, x_2)} = P(B_2)$$



Slika 4: Tetraedar  $T_2$

zbog  $v_{(B_2, x_2)} \geq v_{(B_1, x_1)}$ . Kako se barem jedna strana (bez baze) tetraedra  $T_1$  sastoji od dva brida duljine manje ili jednake jedan (nazovimo ju stranom  $S_1$ ) to je duljina visine  $v_{(S_1, s)}$  nad stranicom  $s$  baze  $B_1$  manja od visine nad stranicom  $s$  modificiranog trokuta koji se još sastoji od dvije stranice duljine 1 (Tvrdnja 1). Također, visina tetraedra  $T_1$  ne može biti veća od visine  $v_{(S_1, s)}$  pa vidimo da je  $v_{T_1} \leq v_{(S_1, s)} \leq v_{\triangle ABD} = v_{T_2}$ . Posljednja nejednakost slijedi iz toga što je  $d$  manje ili jednako duljini od  $s$ . Sada vidimo da je

$$Vol_{T_1} = \frac{1}{3}P(B_1)v_{T_1} \leq \frac{1}{3}P(B_2)v_{T_2} = Vol_{T_2}.$$

Dokažimo sada da je  $Vol_{T_2} \leq \frac{1}{8}$ . Volumen tetraedra  $T_2$  možemo prikazat kao funkciju jedne varijable.

$$Vol_{T_2}(d) = \frac{1}{3}P(B_2)v_{T_2} = \frac{1}{6}dv_{(B_2, x_2)}v_{T_2} = \frac{1}{6}dv_{T_2}^2 = \frac{1}{6}d \left(1 - \frac{d^2}{4}\right)$$

Pronađimo maksimum funkcije  $Vol_{T_2}(d)$  na intervalu  $(0, 1]$ .

1. Definirajmo funkciju za volumen tetraedra  $T_2$ :

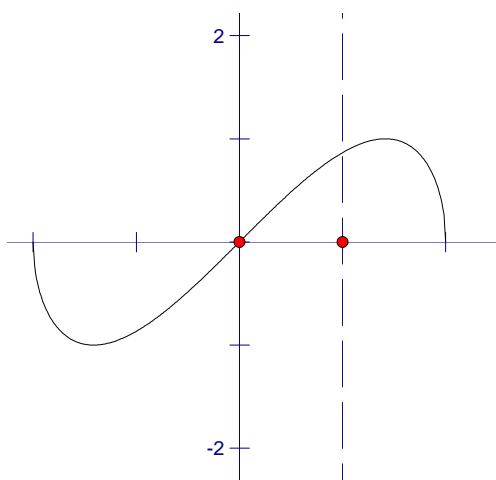
- $\underline{Vol[d]} := d * (1 - (d^2)/4)/6$

2. Izračunajmo gdje se postižu ekstremi:

- $\overline{rj = \text{Solve}[D[\text{Vol}[d], d] == 0, d]}$
- Rezultat:  $-\frac{2}{\sqrt{3}}$  i  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

3. Izračunajmo vrijednosti funkcije u točkama ekstrema:

- $\overline{N[\text{Vol}[d] /. rj]}$
- Iz rezultata  $\{-0.1283, 0.1283\}$  zaključujemo da funkcija raste na intervalu  $< 0, 1]$  što smo mogli vidjeti i iz slike.



Slika 5:  $\text{Vol}'_{T_2}(d) = d \left(1 - \frac{d^2}{4}\right)$ ,  $d \in [-2, 2]$

4. Izračunajmo sada vrijednost funkcije za  $d = 1$ :

- $\overline{\text{Vol}[1]}$
- Rezultat:  $\frac{1}{8}$ .

Kako smo uspjeli pokazati da je maksimalni volumen tetraedra  $T_2$  manji ili jednak jednoj osmini dokazali smo i tvrdnju iz zadatka.

*Napomena:* Zanimljivo je da smo ovom metodom pronašli i tetraedar koji zadovoljava uvjete a volumen mu je točno jedna osmina.

**Zadatak 4** *Pokažite da je ortocentar ortocentričkog tetraedra simeričan središtu njegove opisane sfere u odnosu na težište.*

**Rješenje:** Rješenje ovog naizgled teškog problema može se provesti u nekoliko koraka:

1. Definirajmo točke baze:

$$\begin{aligned} & \overline{tA := \{0, 0, 0\}} \\ \bullet & \quad tB := \{1, 0, 0\} \\ & \overline{tC := \{c1, c2, 0\}} \end{aligned}$$

2. Izračunajmo ortocentar trokuta  $ABC$ :

$$\begin{aligned} & \overline{tGtABC = e2X4[\{tA[[1]], tA[[2]]\}, \\ \bullet & \quad \{tB[[1]], tB[[2]]\}, \{tC[[1]], tC[[2]]\}]; \\ & \overline{tGtABC = \{tGtABC[[1]], tGtABC[[2]], 0\};} \end{aligned}$$

- Pretpostavka da je tetraedar ortocentričan po karakterizaciji ekvivalentna je tome da je barem jedno nožište visina na strane tetraedra jednako ortocentru pripadne strane, odnosno da je svako nožište visina na strane tetraedra ortocentar pripadne strane. Stoga je dovoljno postaviti uvjet da je nožište visine iz vrha  $D$  ortocentar  $tGtABC$  trokuta  $ABC$ , odnosno baze tetraedra.

3. Definirajmo točku  $D$ :

$$\bullet \quad \overline{tD = \{tGtABC[[1]], tGtABC[[2]], z\};}$$

4. Definirajmo visine na strane  $ABC$  i  $ABD$ :

$$\begin{aligned} \bullet & \quad \overline{vABC = e3p2t[tGtABC, tD];} \\ & \overline{vABD = e3p2t[tC, e3protr[tC, e3r3t[tA, tB, tD]]];} \end{aligned}$$

5. Odredimo točku u kojoj se sjeku visine:

$$\begin{aligned} \bullet & \quad \overline{rj = Solve[vABC[[1]] + t*vABC[[2]] == vABD[[1]]} \\ & \quad + k*vABD[[2]], \{t, k\}; \\ & \overline{tT = vABC[[1]] + t*vABC[[2]] /. rj[[1]];} \end{aligned}$$

- Zbog odabrane parametrizacije visine će imati presjek različit od praznog skupa.

6. Provjerimo da li je ortocentar simetričan središtu opisane sfere u odnosu na težište:

- $\overline{\text{FS}[\text{e3m}[\text{tT}, \text{e3O}[\text{tA}, \text{tB}, \text{tC}, \text{tD}]]} == \text{e3G}[\text{tA}, \text{tB}, \text{tC}, \text{tD}]$

- Ovdje koristimo ideju da ako je težište centar simetrije za ortocentar i središte opisane sfere onda je i polovište tih točaka.

Ukoliko ste sve korake odradili kao što je i napisano rezultat koraka 5 biti će *True* što pokazuje da je tvrdnja iz zadatka točna.

**Zadatak 5** Dokažite da ako  $F_n$  označava  $n$ -ti Fibonacci-ev broj onda se dodavanjem broja  $F_n^2$  produktu bilo koja dva različite broja iz skupa

$$\{2F_{n-1}, 2F_{n+1}, 2F_{n-2}F_{n-1}F_n^3, 2F_{n+2}F_{n+1}F_n^3\}$$

za  $n \geq 2$  dobije potpun kvadrat nekog broja.

**Rješenje:** Idemo po slučajevima:

1.  $\frac{4F_{n-1}F_{n+1} + F_n^2}{}$   
 Iz identiteta  $F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n + F_n^2$  i  $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$  slijedi da je  $4F_{n-1}F_{n+1} + F_n^2 = L_n^2$ .  $L_n$  predstavlja niz Lucasevih brojeva koji su po definiciji prirodni.

2.  $\frac{4F_{n-1}^2F_{n-2}F_n^3 + F_n^2}{}$  =  $F_n^2 \overbrace{(4F_{n-1}^2F_{n-2}F_n + 1)}^{(*)}$   
 Dovoljno je pokazati da su svi članovi niza  $(*)$  potpuni kvadrati. Ispišemo li korijene nekoliko prvih članova niza  $(*)$  (1,3,7,19,...) i provjerimo na internet stranici <http://www.research.att.com/~njas/sequences/specijaliziranoj> za nizove prirodnih brojeva dobiti ćemo niz s rekurzijom  $F_{n-2}^2 + F_{n-2}F_{n-1} + F_{n-1}^2$ . Pokažimo sada da je

$$4F_{n-1}^2F_{n-2}F_n + 1 = (F_{n-2}^2 + F_{n-2}F_{n-1} + F_{n-1}^2)^2.$$

---

```
FS[FunctionExpand[
  4*Fibonacci[n - 2]*Fibonacci[n]*Fibonacci[n - 1]^2 + 1 ==
  (Fibonacci[n - 1]^2 + Fibonacci[n - 1]*Fibonacci[n - 2] +
  Fibonacci[n - 2]^2)^2, n \[Element] Integers]]
```

---

Rezultat je  $(64(1 + \sqrt{5}))^n \sin(n\pi) = 0$ , a kako to vrijedi za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi i tvrdnja.

3.  $\frac{4F_{n-1}F_{n+2}F_{n+1}F_n^3 + F_n^2}{}$  =  $F_n^2 \overbrace{(4F_{n+2}F_{n+1}F_nF_{n-1} + 1)}{(**)}$   
 Dovoljno je pokazati da su svi članovi niza  $(**)$  potpuni kvadrati.  
*Usprkos trudu nisam uspio dokazati da su svi članovi niza  $(**)$  potpuni kvadrati. :(*

4.  $\frac{4F_{n+1}F_{n-1}F_{n-2}F_n^3 + F_n^2}{}$  =  $F_n^2 \overbrace{(4F_{n+1}F_nF_{n-1}F_{n-2} + 1)}{ (+)}$   
 Niz  $(+)$  jednak je nizu  $(**)$  s pomakom indeksa za 1 pa se dovoljno pozvati na slučaj 3.

$$5. \frac{4F_{n+1}^2 F_{n+2} F_n^3 + F_n^2}{F_n} = F_n^2 \overbrace{(4F_{n+1}^2 F_{n+2} F_n + 1)}^{(++)}$$

Niz  $(++)$  jednak je nizu  $(*)$  s pomakom indeksa za 2 pa se dovoljno pozvati na slučaj 2.

$$6. \frac{4F_{n+1} F_{n+2} F_{n-2} F_{n-1} F_n^6 + F_n^2}{F_{n-2} F_{n-1} F_{n+1} F_{n+2}} = F_n^4 - 1 \text{ slijedi}$$

$$4F_{n+1} F_{n+2} F_{n-2} F_{n-1} F_n^6 + F_n^2 = 4(F_n^4 - 1)F_n^6 + F_n^2.$$

Neka nam sada *Mathematica* faktorizira novi izraz.

- $\overline{\text{Factor}[4*(F^4 - 1)*F^6 + F^2]}$

Rezultat je  $F^2(-1 + 2F^4)^2$  pa zaključujemo da tvrdnja vrijedi i u ovom slučaju.

DODATAK

**Tvrdnja 1** Za trokut  $ABC$  gdje je stranica  $c$  duljine  $x$ , duljine stranica  $a, b \in \langle 0, l \rangle$  i  $2l > x$  vrijedi da je visina nad stranicom  $c$  najveća kada su stranice  $a$  i  $b$  duljine  $l$ .

**Rješenje:** Iz slike se vidi da se maksimalna visina postiže kod presjeka kružnica, tj. kada su i stranica  $a$  i stranica  $b$  duljine  $l$ . Dio ravnine obojan u crnu boju, zajedno sa pripadnim dijelovima kružnica predstavlja skup točaka kandidata za vrh  $C$ .

